

ZADANIA KOŁOKWIOPODOBNE (1)

Zad. 1. Znaleźć trzy początkowe wyrazy ciągu arytmetycznego (a_n) mając dane

$$a_4 = 6, a_7 = 12.$$

Zad. 2. Wyznaczyć taką dodatnią liczbę x , aby ciąg $(-3, x, -27)$ był ciągiem geometrycznym.

Zad. 3. Wykopano studnię o głębokości 10 m płacąc za pierwszy metr 10 pln a za każdy następny zapłacono dwukrotnie więcej niż za metr poprzedni. Jaki był koszt wykopania studni?

Zad. 4. Obliczyć granice ciągów:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+3)}{(3n-2)(n+5)}$,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n^2-2})$.

Zad. 5. Obliczyć granice funkcji:

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+13}}{x^2 - 9}$,
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3 \sin 3x}$.

Zad. 6. Zbadać ciągłość funkcji:

1. $f(x) = \begin{cases} 2^x + 3 & \text{dla } x \leq 0 \\ (x-2)^2 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$,
2. $f(x) = \begin{cases} 4 - (x+1)^2 & \text{dla } x < 2 \\ x-4 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$

Zad. 7. Wyznaczyć asymptoty funkcji:

1. $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 1}$,
2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Odpowiedzi: 1. 0, 2, 4; 2. $x = 9$; 3. 10230; 4. $\frac{2}{3}, 0$; 5. $\frac{1}{16}, \frac{5}{9}$; 6. Wszędzie; nieciągła dla $x = 2$; 7. $x = 1, y = 0$; pionowych brak, $y = \pm x$.

[ROZWIĄZANIA](#)

ZADANIA KOŁOKWIOPODOBNE (2)

Zad. 1. Korzystając jedynie z definicji pochodnej obliczyć $f'(1)$, jeżeli $f(x) = 5x^2 - 2x$.

Zad. 2. Obliczyć pochodne funkcji:

a) $f(x) = \frac{3}{4}x \cdot \sqrt[3]{x}$,

b) $f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$,

c) $f(x) = \ln(2x^3 + 3x^2)$,

d) $f(x) = \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2$,

e) $f(x) = \ln \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)$,

f) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\ln x}{3}$.

Zad. 3. Zbadać monotoniczność funkcji:

a) $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}$,

b) $f(x) = x \cdot e^{-x}$.

Zad. 4. Wyznaczyć (korzystając z pierwszego w-ku wystarczającego) ekstrema lokalne funkcji:

a) $f(x) = x + \sqrt{3-x}$,

b) $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}} \cdot (2x+1)$.

Zad. 5. Wyznaczyć (korzystając z drugiego w-ku wystarczającego) ekstrema lokalne funkcji:

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x$,

b) $f(x) = 3(x+5)^2$.

Zad. 6. Wyznaczyć ekstrema globalne funkcji:

a) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$, $x \in \langle 0, 5 \rangle$,

b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 8$, $x \in \langle -3, 6 \rangle$.

Odpowiedzi:

1. 8.

2. a) $x^{\frac{1}{3}}$, b) $-x^2 e^{-x}$, c) $\frac{6(x^2 + x)}{2x^3 + 3x^2}$, d) $-\cos x$, e) $\frac{1}{\sin x}$, f) $\frac{3}{x \cdot \ln^2 x + 9x}$.

3. a) $f \downarrow$ dla $x \in (-\infty; -1)$, $f \uparrow$ dla $x \in (1; \infty)$,

b) $f \uparrow$ dla $x \in (-\infty; 1)$, $f \downarrow$ dla $x \in (1; \infty)$.

4. a) $f_{\max.\text{lok.}} = f\left(\frac{11}{4}\right) = \frac{13}{4}$, b) $f_{\max.\text{lok.}} = f(1) = 3$, $f_{\min.\text{lok.}} = f(2) = 0$.

5. a) $f_{\min.\text{lok.}} = f(1) = -1$, b) $f_{\min.\text{lok.}} = f(-4) = 0$.

6. a) $f_{\max.\text{glob.}} = f(5) = 5 - 2\sqrt{5}$, $f_{\min.\text{glob.}} = f(1) = -1$.

b) $f_{\max.\text{glob.}} = f(6) = 100$, $f_{\min.\text{glob.}} = f(3) = -89$.

ROZWIĄZANIA

ZADANIA KOŁOKWIOPODOBNE # 3

Z. 1. Obliczyć obie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji

$$f(x, y) = \ln\left(x^2 + \frac{y}{x}\right) \text{ w punkcie } (1, 0).$$

Z. 2. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

$$f(x, y) = 4xy - x^2 - 2y^4.$$

Z. 3. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x.$$

Z. 4. Obliczyć całki stosując metodę przez części:

a) $\int xe^{-x} dx,$

b) $\int x^5 \ln x dx.$

Z. 5. Obliczyć całki stosując metodę przez podstawianie:

a) $\int \operatorname{ctg} x dx,$

b) $\int x\sqrt{1-x^2} dx.$

Z. 6. Obliczyć całki oznaczone:

a) $\int_0^1 x\sqrt{x} dx.$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin x)^2 \cos x dx.$

Z. 7.

a) Obliczyć pole figury ograniczonej krzywą $y = 2 - x^2$ oraz osią Ox ,

b) Obliczyć pole figury ograniczonej krzywymi $y = x^2$ oraz $y = \sqrt{8x}$.

Z. 8. Obliczyć $AB - 2 \cdot BA$, jeżeli

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Z. 9. Obliczyć

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^8,$

b) $2A - B^T A$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$

Rozwiązania: 1. $f'_x(1, 0) = 2, f'_y(1, 0) = 1$; 2. $f_{\max.\text{lok.}} = f(2, 1) = f(-2, -1) = 2$;

3. $f_{\min.\text{lok.}} = f(-2, -1) = -2$; 4. a) $e^{-x}(-x-1) + C$, b) $\frac{x^6}{36}(6\ln x - 1) + C$; 5. a) $\ln|\sin x| + C$,

b) $-\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2} + C$; 6. a) $\frac{2}{5}$, b) $\frac{7}{3}$; 7. a) $\frac{8}{3}\sqrt{2}$, b) $4\sqrt{2} - \frac{8}{3}$; 8. $\begin{bmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -2 & 13 & -5 \\ -14 & -7 & -19 \end{bmatrix}$;

9. a) $\begin{bmatrix} -74 & -105 \\ 35 & -39 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} -7 & -2 \\ -16 & 10 \end{bmatrix}.$

ZADANIA KOŁOKWIOPODOBNE # 4

Z. 1. Wykorzystując własności wyznaczników obliczyć

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix},$$

a następnie sprawdzić wynik licząc ten sam wyznacznik metodą Gaussa.

Z. 2. Odwrócić macierze

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Z. 3. Rozwiązać układ równań metodą macierzy odwrotnej

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y - 3z = 5 \\ x - 4z = -1 \\ -x + 2y + 5z = -2 \end{cases},$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x - y - 3z = 7 \\ x + 2y - 4z = 0 \\ -3x - 2y + 5z = -4 \end{cases}.$$

Z. 4. Rozwiązać układy równań stosując tw. Cramera (wyznacznikami)

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - y + 2z = -1 \\ x + 2y - 3z = -2, \\ -3y + 6z = 6 \end{cases},$$

$$\text{b) } \begin{cases} -2x + y + 5z = -2 \\ x + 2y - 2z = 5 \\ x + 3y + 6z = -9 \end{cases}.$$

Z. 5. Rozwiązać układy równań metodą Gaussa-Jordana

$$\text{a) } \begin{cases} 5x - y + 2z = -4 \\ x - 2y + 3z = -2, \\ 2x + y = 3 \end{cases},$$

$$\text{b) } \begin{cases} 4z + y - 3z = 7 \\ x + 2y + 5z = 4. \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}.$$

ROZWIĄZANIA

1. 1125

$$2. \text{ a) } \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \text{ b) } \begin{bmatrix} \frac{11}{18} & -\frac{5}{18} & \frac{1}{18} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{18} & -\frac{7}{18} & \frac{5}{18} \end{bmatrix}.$$

3. a) $x=3, y=-2, z=1$; b) $x=2, y=-1, z=0$.

4. a) $x=-1, y=4, z=3$; b) $x=-3, y=2, z=-2$.

5. a) $x=-1, y=5, z=3$; b) $x=3, y=-2, z=1$.